

Série 3 – corrigé

Exo. 3.1

Les équations 3.27 à 3.33 se démontrent sans difficulté en appliquant bien chacun des opérateurs

Soit $f(x_1, x_2, x_3, t)$ une fonction scalaire. Calculer $\frac{D}{Dt}(\partial_i f)$ et $\partial_i \left(\frac{Df}{Dt} \right)$

$$\frac{D}{Dt}(\partial_i f) = \frac{D}{Dt}(\partial f / \partial x_i) = \frac{\partial}{\partial t}(\partial f / \partial x_i) + \mathbf{V} \cdot \text{grad}(\partial f / \partial x_i)$$

$$\frac{D}{Dt}(\partial_i f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial t} + \mathbf{V} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_3} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial t} + V_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\partial_i \left(\frac{Df}{Dt} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \text{grad} f \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(V_j \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial t} + V_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial V_j}{\partial x_i}$$

Ces deux quantités sont égales ssi le champ de vitesse ne dépend pas de la coordonnée x_i , autrement dit s'il est uniforme (il peut varier dans le temps mais pas dans l'espace).

Exercice 3.2 : Fusion par laser

$$T(r) = T_\alpha + \frac{\beta P}{2\pi\kappa r} \exp\left(-\frac{V(x+r)}{2\alpha}\right) \text{ avec } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

1- α étant la diffusivité thermique elle s'exprime en m^2/s . Ainsi, à l'intérieur de l'exponentiel

$$\frac{m}{s} \cdot \frac{m}{m^2} \cdot s = [-]. \beta \text{ est un rendement ou une efficacité donc sans unité. } \kappa \text{ est la conductivité}$$

$$\text{thermique en W/mK. } \frac{\beta P}{\kappa r} = \frac{W}{\frac{W}{mK} m} = K \text{ soit une température.}$$

2- La température tend vers l'infinie lorsque $r=0$. Le modèle est divergent, c'est la grande limitation de ce modèle.

3- Représentation Eulérienne : la température est donnée dans la fenêtre d'observation située en r et elle ne dépend pas du temps, le champ est stationnaire.

4- $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ et pourtant il y a bien chauffage de la matière en avant de la source puis refroidissement après.

5- Dérivée particulaire de la température :

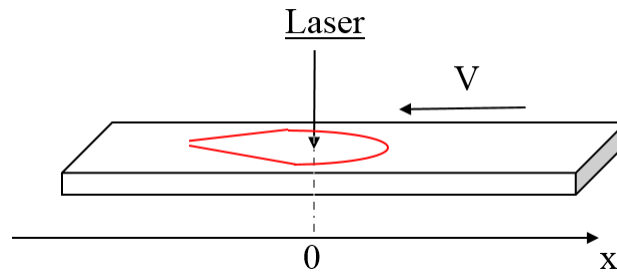
Pour $x < 0$, $y = z = 0$ et $r = -x$

$$\text{Pour } x < 0, y = z = 0 \text{ et } r = -x, T = T_\alpha - \frac{\beta P}{2\pi\kappa x}$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T \text{ avec } \vec{v} = -V \vec{e}_x$$

$$\text{et } \frac{DT}{Dt} = \frac{\beta P}{2\pi\kappa x^2} = -\frac{V\beta P}{2\pi\kappa x^2} < 0. \text{ i.e. refroidissement en } x < 0$$

- 6- En Lagrangien, on suit un élément de matière qui se trouve à $(x_0, 0, 0)$ à $t = 0$ et qui se déplace à la vitesse $-V$ selon x :



$$x = x_0 - Vt, \quad r = |x_0 - Vt|$$

$$r = x_0 - Vt \quad \text{si } x_0 > Vt \quad \text{i.e. } t < \frac{x_0}{V} \quad \text{et } T = T_a + \frac{\beta P}{2\pi\kappa(x_0 - Vt)} \exp\left(-\frac{V^2 t - x_0 V}{\alpha}\right)$$

$$r = Vt - x_0 \quad \text{si } x_0 < Vt \quad \text{i.e. } t > \frac{x_0}{V} \quad \text{et } T = T_a + \frac{\beta P}{2\pi\kappa(Vt - x_0)} \exp(0) = T_a + \frac{\beta P}{2\pi\kappa(Vt - x_0)}$$

La dérivée temporelle en amont et en aval de la source laser vaut donc :

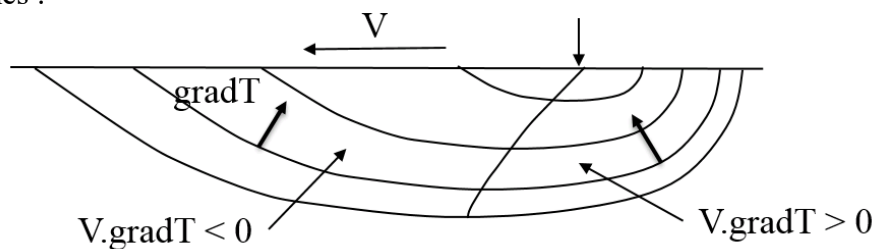
$$\text{pour } x > 0, \quad \dot{T} = \frac{\beta P V^2}{\alpha 2\pi\kappa(x_0 - Vt)} \exp\left(-\frac{V^2 t - x_0 V}{\alpha}\right) + \frac{V\beta P}{\alpha 2\pi\kappa(x_0 - Vt)^2} \exp\left(-\frac{V^2 t - x_0 V}{\alpha}\right)$$

$$\dot{T} = \frac{\beta P V}{2\pi\kappa(x_0 - Vt)} \exp\left(-\frac{V^2 t - x_0 V}{\alpha}\right) \left[\frac{V}{\alpha} + \frac{1}{x_0 - Vt} \right] > 0, \quad \text{i.e. chauffage}$$

$$\text{pour } x < 0, \quad \dot{T} = -\frac{\beta P V}{2\pi\kappa(Vt - x_0)} < 0. \quad \text{i.e. refroidissement}$$

Pour $x < 0$, i.e. en aval de la source laser, les approches eulérienne et lagrangienne donnent évidemment la même expression de la vitesse de refroidissement. Il en est de même pour le chauffage en amont de la source

Dans le plan $y = 0$, la zone de chauffage et celle de refroidissement sont délimitées par le signe du produit scalaire de la vitesse et du gradient de température, ce dernier étant perpendiculaire aux isothermes :



NB : courbe de température maximum dans le plan $y = 0$.

Dans le plan de symétrie, $y = 0$, le lieu des points de température max

$$\text{est donné par } \frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = -v \frac{\partial T}{\partial x} = 0. \quad \text{avec } \vec{v} = -V\vec{e}_x$$

$$\text{et } T(x, y) = T_a + \frac{\beta P}{2\pi\kappa\sqrt{x^2 + z^2}} \exp\left(-\frac{V(x + \sqrt{x^2 + z^2})}{2\alpha}\right)$$

L'éq. des T max est donnée par $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$. i.e. $\vec{\nabla} T$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

Exo 3.6

Pour calculer le potentiel électrostatique V créé par une charge ponctuelle q placée à l'origine du repère $(0,x,y,z)$, on utilise la loi de Maxwell qui s'écrit $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ ou ρ est la densité

volumique de charge électrique.

Montrez que E et V en un point M ne dépendent que de r , distance à l'origine et que E est radial. Cela vient des symétries du problème. On utilisera donc un repère sphérique avec la charge électrique en son centre.

Calculez le flux du champ électrique E à travers la sphère centrée en l'origine et de rayon R et donné par : $F(R) = \int_{\text{sphère}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS$ ou $\vec{n}$ est la normale unitaire à dS .

$$F(R) = \int_{\text{sphère}} \vec{E} \cdot \vec{n} ds = E(R) \int_{\text{sphère}} ds = 4\pi R^2 E(R)$$

Utilisez le théorème de la divergence (dit aussi de Gauss) pour en déduire le champ électrique $E(r)$ puis le potentiel électrostatique $V(r)$ sachant que $E = -\nabla V$.

$$F(R) = \int_{\text{sphère}} \vec{E} \cdot \vec{n} ds = \int_{\text{boule}} \text{div} \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\text{boule}} \rho dV = \frac{q}{\epsilon_0}$$

car $\text{div} \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ ou ρ est la densité de charge électrique

Ainsi, on détermine E puis V puisque le flux de E est calculé pour tout rayon $R > 0$.

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad \text{et} \quad V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + \text{cste}$$